C.E.S.T.I.

CENTRE D'ETUDES SUPERIEURES DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES

CANDIDATS DES CLASSES PREPARATOIRES AUX GRANDES ECOLES

SESSION DE JUIN 1988 : EPREUVE DE MATHEMATIQUES II 4 Heures

Les deux problèmes de cette épreuve sont indépendants.

PREMIER PROBLEME

Soit (C) l'ensemble de points M défini dans le repère orthonormé direct $(O|\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par

$\vec{F}(\alpha) = \overrightarrow{OM} = a[\vec{i}\cos^2\alpha + \vec{j}\sin\alpha\cos\alpha + \vec{k}\sin\alpha]$, $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$

a étant une constante strictement positive.

On désigne par (e) la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

par $\vec{F}_1(\alpha)$ la fonction $\frac{d\vec{F}}{d\alpha}$ dérivée de $\vec{F}$ par rapport à α

par $\vec{F}_2(\alpha)$ la fonction dérivée de $\vec{F}_1$ par rapport à α

par A le point tel que $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$.

Dans ce problème interviendront les fonctions à valeurs vectorielles :

$$\begin{cases} \vec{X}_1 = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha = \vec{u}(\alpha) \\ \vec{Y}_1 = -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha = \vec{u}(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \vec{X} = -\vec{i}\sin 2\alpha + \vec{j}\cos 2\alpha = \vec{u}(2\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \vec{Y} = -\vec{i}\cos 2\alpha - \vec{j}\sin 2\alpha = \vec{u}(2\alpha + \pi) \end{cases}$$

ainsi que les bases orthonormées directes $(E_1) = (\vec{X}_1,\vec{Y}_1,\vec{k})$ et $(E) = (\vec{X},\vec{Y},\vec{k})$.

1°) a) Ecrire les équations de la tangente en M à (C).

b) Déterminer les coordonnées du point P de cette tangente qui est dans le plan $(O|\vec{i},\vec{j})$ tracer la courbe ensemble des points P.

c) Calculer la norme $\sqrt{\vec{F}_1^2}$ du vecteur $\vec{F}_1$ et exprimer le vecteur unitaire : $\vec{T} = \frac{\vec{F}_1}{\sqrt{\vec{F}_1^2}}$ sur la base (E).

2°) a) Déterminer l'expression de $\vec{F}_2$ puis celle de $\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2$ sur la base (E).

b) Déterminer l'expression sur la base (E) du vecteur unitaire de $\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2$ qui a une composante positive sur $\vec{k}$.

3°) a) Déterminer le rayon de courbure R de (C) en M ainsi que l'expression sur la base (E) du vecteur unitaire $\vec{N}$ de la normale principale de (C) en M.

I étant le centre de courbure de (C) en M, exprimer $\overrightarrow{MI}$ sur la base (E).

b) Déterminer l'expression sur la base (E) du vecteur $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ et vérifier que ce résultat a déjà été obtenu précédemment.

Tournez la page S.V.P.

c) Exprimer $\vec{F}$ et $\vec{B} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{F})$ sur la base (E) et déduire du résultat obtenu quelle est la projection orthogonale de O sur le plan osculateur en M à (C).

4°) a) Les vecteurs $(\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ constituent une base orthonormée directe (f) variable en fonction de α par rapport à (e). Vérifier que les dérivées respectives $\vec{T}_1$, $\vec{N}_1$, $\vec{B}_1$ de $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ par rapport à α peuvent s'écrire $\vec{T}_1 = \vec{\delta}_\alpha \wedge \vec{T}$; $\vec{N}_1 = \vec{\delta}_\alpha \wedge \vec{N}$; $\vec{B}_1 = \vec{\delta}_\alpha \wedge \vec{B}$

Exprimer $\vec{\delta}_\alpha$ par ses composantes sur (f).

b) L'abscisse curviligne s sur (C) étant définie en orientant (C) selon $\vec{T}$, vérifier que :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{\delta}_s \wedge \vec{T} \quad ; \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{\delta}_s \wedge \vec{N} \quad ; \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{\delta}_s \wedge \vec{B}$$

et exprimer $\vec{\delta}_s$ par ses composantes sur (f). Interpréter ces composantes.

5°) a) Calculer $\vec{F}^2$ et en déduire que l'arc (C) est tracé sur une sphère (S_1) que l'on caractérisera.

b) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ sur la base (E_1) et en déduire que l'arc (C) est tracé sur un cône de révolution (S_2) que l'on caractérisera.

c) Vérifier que l'arc (C) est tracé sur un cylindre du second degré (S_3) dont les génératrices sont parallèles à $\vec{j}$; caractériser (S_3).

d) Etudier la projection orthogonale de (C) sur le plan $(O|\vec{I},\vec{J})$ et en déduire que l'arc (C) est tracé sur un cylindre de révolution (S) ; caractériser (S).

e) Un vecteur unitaire de la normale en M à (S) est $\vec{n} = \vec{Y}$ on l'exprime par ses composantes sur (f) : $\vec{n} = \vec{N}\cos\varepsilon + \vec{B}\sin\varepsilon$ ce qui définit $\sin\varepsilon$ et $\cos\varepsilon$.

On exprime aussi le vecteur unitaire $\vec{G} = \vec{n} \wedge \vec{T}$ par ses composantes sur (f).

Les vecteurs $(\vec{T},\vec{G},\vec{n})$ constituent une base orthonormée directe (D) fonction de α par rapport à (e). Calculer $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$ et $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ en fonction de α.

f) Vérifier que $\frac{d\vec{n}}{d\alpha} = \vec{K} \wedge \vec{n}$; $\frac{d\vec{G}}{d\alpha} = \vec{K} \wedge \vec{G}$ $\frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{J} \wedge \vec{n}$; $\frac{d\vec{G}}{ds} = \vec{J} \wedge \vec{G}$

et exprimer les différences $\vec{K} - \vec{\delta}_\alpha$ et $\vec{J} - \vec{\delta}_\alpha$.

6°) On suppose que α est fonction deux fois dérivable du temps t à dérivées (α', α'') par rapport à t.

a) Le solide $(M|\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ est alors en mouvement par rapport à $(O|\vec{I},\vec{J},\vec{k})$; déterminer les éléments de réduction en M du torseur distributeur des vitesses (V) associé à ce mouvement.

b) P étant un point de l'axe de (V), déterminer $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\vec{F}_1$, $\vec{\delta}_\alpha$; exprimer le moment $\vec{\mu}$ en P du torseur (V) en fonction de $\vec{F}_1$, $\vec{\delta}_\alpha$ et α'.

c) On suppose que l'accélération $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(M)$ du mouvement de M vérifie la relation : $\vec{k}.(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}) = 0$

Exprimer α' en fonction de α, α_0, α'_0 ; on posera : $\Omega = \alpha'_0 \cos^2\alpha_0$

(α_0, α'_0 valeurs de α, α' à la date $t = 0$; $\alpha_0 \neq \frac{\pi}{2}$, α'_0 non nul).

Exprimer α'' en fonction de α et Ω. Exprimer t en fonction de α, α_0, α'_0.

T.S.V.P

DEUXIEME PROBLEME Math. 2

Relativement au repère orthonormé direct $(O|\vec{I},\vec{J},\vec{K})$, la position M^t d'une particule M à la date t est définie par : $\overrightarrow{OM}^t = x\,\vec{I} + y\,\vec{J} + z\,\vec{K}$

le vecteur vitesse de M à cette même date est $\vec{v}(M|t) = x'\,\vec{I} + y'\,\vec{J} + z'\,\vec{K}$

avec $x' = \omega(-2x + z)$; $y' = \omega(-2y + z)$; $z' = \omega(x + y - 3z)$

ω étant une constante positive.

On définit la position M^0 de M à la date zéro par $\overrightarrow{OM^0} = x_0\,\vec{I} + y_0\,\vec{J} + z_0\,\vec{K}$

et on suppose que M^0 est distinct de O.

1°) a) Vérifier que si M^0 appartient à l'une des arêtes Δ_1, Δ_2, Δ_3 d'un trièdre de sommet O, alors M^t appartient à cette même arête.

Caractériser ces trois arêtes ainsi que les trois fonctions $f_i(t)$ telles que $\overrightarrow{OM}^t = \overrightarrow{OM^0}\, f_i(t)$ pour $M^0 \in \Delta_i$ $(i = 1,2,3)$.

b) Vérifier qu'il est possible de classer f_1, f_2, f_3 de telle sorte que $f_2 \equiv (f_1)^2$, $f_3 \equiv (f_2)^2$; adoptant ce classement, on déterminera les vecteurs unitaires respectifs $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$ de Δ_1, Δ_2, Δ_3 en choisissant : $\vec{I}.\vec{I} > 0$, $\vec{I}.\vec{J} > 0$, $\vec{I}.\vec{K} > 0$

La base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ est orthonormée directe :

écrire la matrice de passage

	$\vec{I}$	$\vec{J}$	$\vec{K}$
$\vec{I}$			
$\vec{J}$			
$\vec{k}$			

2°) On repère M par rapport à $(O|\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ $\overrightarrow{OM}^t = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} + Z\,\vec{K}$; $\overrightarrow{OM^0} = X_0\,\vec{I} + Y_0\,\vec{J} + Z_0\,\vec{K}$

$\vec{v}(M|t) = X'\,\vec{I} + Y'\,\vec{J} + Z'\,\vec{K}$

a) Exprimer X', Y', Z' en fonction de X, Y, Z et ω.

b) Tracer la trajectoire de M dans l'hypothèse où M^0 appartient à l'un des plans $(O\Delta_2\Delta_3)$, $(O\Delta_3\Delta_1)$, $(O\Delta_1\Delta_2)$.

c) Déduire de ces cas particuliers, la trajectoire de M dans le cas général.

3°) a) Exprimer : x, y, z en fonction de x_0, y_0, z_0, ω, t

x_0, y_0, z_0 en fonction de x, y, z, ω, t.

b) Vérifier que l'on peut écrire : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et expliciter la matrice E(t), ainsi que son inverse $E^{-1}(t)$.

c) Montrer que $E(t) = A\, f_1(t) + B\, f_2(t) + C\, f_3(t)$

A, B, C étant trois matrices indépendantes de t que l'on explicitera.

4°) Exprimer les composantes x", y", z" du vecteur accélération :

$\vec{\gamma}(M|t) = x''\,\vec{I} + y''\,\vec{J} + z''\,\vec{K}$ en fonction de x, y, z, ω.

• •
•

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail